数理解析研究所講究録
1119巻 1999年 98-109

2次のラグランジアンを持つ系の多次元における量子論的 caustics

宮崎 倫 (Hitoshi Miyazaki) *

188-8501 東京都田無市緑町3－2－1

高エネルギー加速器研究機構素粒子原子核研究所理論部

1 イントロダクション

点粒子の運動の量子力学を考える際、ある点 $\boldsymbol{a}$ から別の点 $\boldsymbol{b}$ への確率振幅の計算が必要になることがある。確率振幅の計算はオペレータ形式でも実行できるが、経路積分による計算もよく用いられている。経路積分は、$\boldsymbol{a}$ から出発し $\boldsymbol{b}$ へ至るあらゆる経路をある重みで足しあわせることで得られ、次のように表記される。

$$\int_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}} \mathcal{D}\boldsymbol{x} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t=t_I}^{t=t_F} dtL\right),$$

ただし L は系のラグランジアンである。経路の足しあげは、古典的に許されるものだけでなく境界条件を満足するあらゆる経路に関して実行する。

一般にラグランジアンに相互作用項がある場合、近似なしに経路積分を計算することはできないので、様々な近似法が開発されているが、その一つに半古典近似法と呼ばれ

*miyazaki@tanashi.kek.jp

る有用な方法がある。これは、量子論的に許される経路 $\boldsymbol{x}(t)$ を、運動方程式の解 $\boldsymbol{x}_{cl}(t)$ と量子論的揺らぎ$\eta(t)$ の和に分解し、ラグランジアン L を $\eta(t)$ に関して 2 次まで展開して積分する近似法である。この近似法においては、与えられた境界条件を満足する運動方程式の解の存在が暗黙のうちに仮定されている。問題は、初期値問題に対する運動方程式の解の存在は明らかだが、境界値問題の場合は、運動方程式の解が存在するか否かの保証がない点である。多くの場合、与えられた境界条件を満足する運動方程式の解は存在するが、特定のポテンシャルの下での運動の場合、ある時間 T では初期位置 $\boldsymbol{a}$ に依存する特定の点以外へ行けなくなることがある。このような状況を caustics と呼んでいる。caustics が生じるときは、初期速度 $\boldsymbol{v}_i$ を任意にとっても時間 T において行くことのできる位置がさだまってしまう（このような点のことを conjugate point と呼ぶ）という特徴がある。このような特異点が生じる現象は幾何光学においても生じる [1] [2]。さて、caustics を生じさせるポテンシャルの下で半古典近似法を用いて計算しようとすると通常のやりかたでは計算が実行できない。そのため、別の計算手法を利用しなければならない [3]。この点を見るために、1 次元系の簡単な例を考えてみよう。

1 次元系で caustics を生じさせるポテンシャルとしては、調和振動子の例がよく知られている。一般の角振動数 ω では caustics は生じないが、$\omega = \omega_n := n\pi/T \ (n \in Z)$ の時は caustics が生じる。この系のラグランジアン L は

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - \frac{m\omega_n^2}{2}x^2(t)$$

で与えられる。ただし m は点粒子の質量、$x(t)$ は点粒子の位置である。なお、$\dot{x}(t) := dx(t)/dt$ である。この時、運動方程式は$\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = 0$ であるから、その一般解は

$$x(t) = A\sin(\omega_n t) + B\cos(\omega_n t)$$

である（$\ddot{x}(t) := d^2x(t)/dt^2$）。ただし A, B は任意の定数である。ここで、境界値問題 $x(0) = a, \ x(T) = b$ を考えよう。前者の条件より $B = a$ が定まる。しかし、$\sin(\omega_n T) = 0$

により後者の条件から未定係数 A を決定することはできず、$b=(-1)^n a$ なる条件となる。すなわち $t=0$ において速度が任意であっても時刻 $t=T$ においては、必ず $(-1)^n a$ なる点に行き、かつそれ以外の点へは行けないことを意味する。これは、境界条件を満足する解が 1 変数の族を構成すると言いかえることもできる。ここで、古典論的に caustics が生じたときその量子論がどうなっているかを考察してみよう。古典論的 caustics は幾何光学の caustics 現象に対応しているので、量子論的 caustics には波動光学的な特徴が現れるかも知れないので、これは興味ある考察である。そのためには、ファインマン核 $K(x=b,T;x=a,0)$ なる量を計算するとよい。実は、一般の角振動数 ω に対するファインマン核の式は求められており [4]、

$$K(x=b,T;x=a,0)=\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin(\omega T)}}\exp\left(\frac{im\omega}{2\hbar\sin(\omega T)}\{(a^2+b^2)\cos(\omega T)-2ab\}\right)$$

で与えられる。ところが、この式で $\omega=\omega_n$ と置いてしまうと、平方根の中身と指数関数の指数が共に発散してしまい、物理的にどういう状況になっているのかが全くわからなくなってしまう。

以上は調和振動子の場合の例だが、それ以外のポテンシャルでも caustics は生じるはずであり、より一般的な議論が必要になる。また、ファインマン核の計算の問題だけでなく、caustics が生じた時の物理がどのようなものかを調べることも興味ある問題である。我々は、[5]、[6] においてこの点を議論した。これらの論文では、2 次のラグランジアンを持つ 1 次元系に対する議論を展開した。考察したラグランジアンは

$$L=\frac{1}{2}\dot{x}^2(t)-\frac{\lambda(t)}{2}x^2(t)-\mu(t)x(t)$$

である。結論として、古典論的に caustics が生じている系で量子論を考えると時間 T で行くことのできる位置は量子論的にも conjugate point への遷移しか許されないことがわかった。ファインマン核は

$$K(b,T;a,0)=\sqrt{|k(\lambda)|}\delta(b-k(\lambda)a-s(T))\exp(iI[x_{cl}]-i\pi m(\lambda)/2)$$

のようになった。ここで、$k(\lambda)$ は caustics が生ずる際ポテンシャル $\lambda(t)$ によって特徴づけられるある量、$s\,(t)$ は運動方程式の特殊解、$I[x_{cl}]$ は古典的作用である。また、$m(\lambda)$ はモース指数と呼ばれるある種の位相的な量である [7]。なお、caustics が生じるか否かは、運動方程式の斉次解 $u(t)$ 中に、時刻 $t = T$ においてゼロになるかモードが存在するかどうかで判別することができる。数学的には、ヤコビ場が $t = T$ においてゼロになるかどうかということに対応している。さらに、1 次元系を多次元に拡張した場合、caustics がどのようなことを引き起こすかを考えることは興味のあるところである [8]。次にこの点について議論したい。

2 多次元での 古典論的 caustics

ここで考えるのは、以下のラグランジアンを持つ d 次元系の点粒子の量子系である。

$$L = \frac{1}{2}P_{ij}(t)\dot{x}^i\dot{x}^j + Q_{ij}(t)x^i\dot{x}^j + \frac{1}{2}R_{ij}(t)x^ix^j + S_i(t)x^i. \tag{1}$$

i, j は 1 から d まで走る。ここで考えたいことは、[5] の多次元系への拡張であるので、まず、(1) の系での古典的 caustics について議論する必要がある。そのために、まず運動方程式の解について調べる。ラグランジアン (1) に対する運動方程式は、

$$\Lambda_{ij}x^j(t) + S_i(t) = 0, \tag{2}$$

で与えられる。ただし、作用素 Λ_{ij} は$\Lambda_{ij} = -d/dt(P_{ij}(t)d/dt{+}Q_{ji}(t)){+}Q_{ij}(t)d/dt{+}R_{ij}(t)$ である。ここで、(2) の解 $\bar{x}^i(t)$ に対して Dirichlet 境界値問題を考え、以下のような境界条件を課す。

$$\bar{x}^i(0) = a^i, \qquad \bar{x}^i = b^i, \tag{3}$$

ただし、a^i, b^i はそれぞれ定数である。運動方程式 (2) は $x^i(t)$ について線形であるから、その解 $\bar{x}^i(t)$ の一般解は斉次方程式の 2 つの独立な解 $u^j_k(t), v^j_k(t)$ の線形結合と特殊

解 $s^i(t)$ との和になる。

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij}u^j_k(t) &= \Lambda_{ij}v^j_k(t) = 0, \\ \bar{x}^i &= A^k u^i_k(t) + B^k v^i_k(t) + s^i(t). \end{aligned}$$

A^i, B^i は任意定数である。ここで、斉次方程式の独立解 $u^j_k(t), v^j_k(t)$ について以下の条件を課して特定することにする。

$$\begin{aligned} u^i_k(0) &= \dot{v}^i_k(0) = 0, \\ v^i_k(0) &= \delta^i_k. \end{aligned}$$

なお、$\dot{u}^i_k(0)$ は特定しないことにする。つぎに、境界条件 (3) によって係数 A^k, B^k を決定する。初期条件 $\bar{x}^i = a^i$ により $B^i = a^i$ がただちに言える。一方、A^i は $t = T$ における条件より求められるが、$\det u^i_k\ (T) = 0$ の場合は係数を決定することが出来ない。このような状況が生じたときが、多次元系での古典的 caustics になっている。caustics が生じるとき、$u^i_k(T)$ の行列式がゼロになっていることから、行列 U を $(U)_{ik}(t) := u^i_k(t)$ で定義すると、

$$U(T) = \begin{array}{rc} & \begin{array}{cc} \overbrace{}^{f} & \overbrace{}^{d-f} \end{array} \\ \begin{array}{r} f\ \{ \\ d-f\ \{ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

の形になることがわかる。$*$ の部分に関してはどのような値が入ってもよい。$f = 0$ の場合は $\det U(T)$ はゼロにならないので non-caustics の場合に対応し、$f = d$ の場合は係数 A^i がすべての i について不定となる。また、$0 < f < d$ の場合は f 個分の A^i が不定のまま残る。ここで、$f = d$ の場合の cautics を *full caustics*、$0 < f < d$ の場合のそれを *partial caustics* と呼ぶことにしよう。1 次元系での caustics はその種類が 1 種類であったのに対し、d 次元系においては 2 種類の caustics が存在する点は、多次元系での caustics で現れる特徴の 1 つである。

次に、caustics の幾何学的意味について考える。caustics が生じたとき、時刻 $t=T$ において粒子の行くことができる点は、

$$x^i(T) = A^k u^i_k(T) + h^i(a)$$

である。ただし、

$$h^i(a) = a^k v^i_k(T) + s^i(T)$$

である。この $x^i(T)$ の中の A^k を別の表現で書き表してみる。$f \neq 0$ の時、係数 A^k のうち決定されるのは、$k = f+1, \cdots, d$ の成分のみであり

$$A^k = b^k - h^k(a), \qquad k = f+1, \cdots, d$$

である。他の成分は任意定数のまま残る。簡単のため、$A^k (k = 1, \cdots, f)$ についてゼロとおいてしまうと、

$$\bar{x}^i(t) = \left\{ v^i_l(t) - \sum_{k=f+1}^{d} v^k_l(T) u^i_k(t) \right\} a^l + \sum_{k=f+1}^{d} u^i_k(t) b^k + s^i(t) - \sum_{k=f+1}^{d} u^i_k(t) s^k(T),$$

となり、$t = T$ において

$$\bar{x}^i(T) = u^i_k(T) b^k + \{\delta^i_k - u^i_k(T)\} h^k(a). = (U)_{ik}(T) b^k + (U^\perp)_{ik} h^k(a).$$

ただし、$(U^\perp)_{ik}(t) := \delta^i_k - u^i_k(t) = (1 - U(t))_{ik}$ である。これを図式的に描くと図 1 のようになることがわかる。

3　多次元系の量子論的 caustics

前章では多次元系における古典的 caustics について調べたが、この章ではその量子論を考察する。ここで、われわれが注目するのはファインマン核 $K(\boldsymbol{b}, T; \boldsymbol{a}, 0)$ である。

$$K(\boldsymbol{b}, T; \boldsymbol{a}, 0) = \int_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}} \mathcal{D}\boldsymbol{x} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t=0}^{t=T} dtL \right).$$

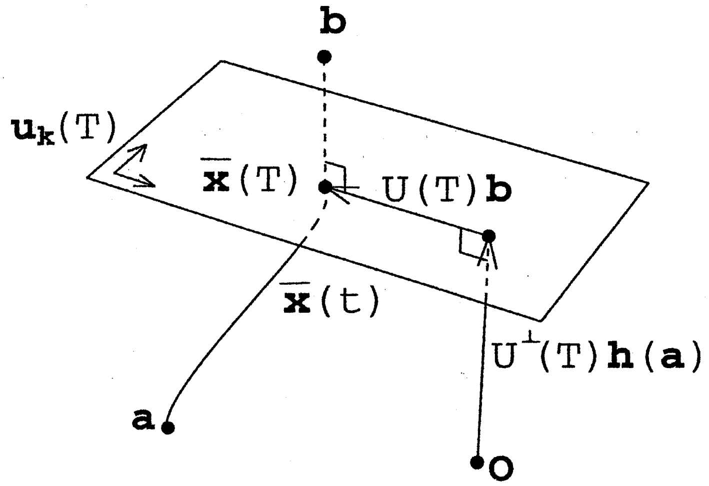

図 1: $U(T)$ が対称行列の時の caustics 面の模式図。

ここでは、ファインマン核を経路積分の手法で計算することを考える。考えている系のラグランジアン (1) は $x^i(t)$ について高々 2 次であるから、半古典近似法によって計算をしても得られる結果は正確な答である。したがって、ここでは半古典近似法を用いて計算を実行する。ただし、caustics が生じているときの半古典近似法による計算には少し注意が必要である。なぜならば、半古典近似法においては古典解の存在が暗黙のうちに仮定されているからである。

半古典近似法においては、粒子のとりうる軌道 $x^i(t)$ を、境界条件 ${x_{cl}}^i(0) = a^i, \quad {x_{cl}}^i(T) = b^i$ を満足する古典解 ${x_{cl}}^i(t)$ と量子論的揺らぎ $\eta^i(t)$ との和に分解して議論する。

$$x^i(t) = x^i_{cl}(t) + \eta^i(t), \tag{4}$$

ただし、$\eta^i(t)$ は境界条件 $\eta^i(0) = \eta^i(T) = 0$ を満足するものとする。caustics が生じた

場合、与えられた境界条件を満足する古典解の存在するかどうかは一般的にはわからないので、(4) のような単純な分解では議論できない。そのため、compensation factor とよばれる量 $\rho^i(t)$ を新たに導入して、(4) とは異なる次のような $x^i(t)$ の分解によって議論する必要がある。

$$x^i(t) = \bar{x}^i(t) + \rho^i(t) + \eta^i(t).$$

ただし、$\bar{x}^i(T) = c^i \neq b^i$, $\bar{x}^i(0) = a^i$, $\rho^i(T) = b^i - c^i = b^i - \bar{x}^i(T)$, $\rho^i(0) = 0$, $\eta^i(T) = \eta^i(0) = 0$ である。c^i は古典解 $\bar{x}^i(t)$ が存在するように選ぶものとする。つまり、与えられた境界条件 $x^i(0) = a^i$, $x^i(T) = b^i$ を満足するような古典解の存在がわからないので、$t = T$ における境界条件をずらした古典解 $\bar{x}^i(t)$ を構成し、境界条件がずれた分を compensation factor によって埋めあわせて半古典近似法を利用するのである。ここで、compensation factor $\rho^i(t)$ は境界条件のずれを補償するならばなんでも構わないので、境界条件を満足するようにあらかじめ形を決めてしまうものとする。なお、

$$\rho^i(T) = b^i - \bar{x}^i(T) = (U^{\perp})^i_j(T)(b^j - h^j(\boldsymbol{a})) \tag{5}$$

であるので、$i = f+1, \cdots, d$ の成分については $\rho^i(T) = 0$ となっている。

さて、$x^i(t)$ の新しい分解 (3) において、軌道 $x^i(t)$ の持っている自由度はすべて量子論的揺らぎ $\eta^i(t)$ に置き換えることができた。つぎに、この $\eta^i(t)$ を作用素 Λ_{ij} の固有関数 $\chi^j_n(t)$ によって展開することを考える。

$$\Lambda_{ij}\chi^j_n(t) = \lambda_n \chi^j_n(t). \tag{6}$$

ここで λ_n は固有値、固有関数は境界条件 $\chi^j_n(0) = \chi^j_n(T) = 0$ を満足し、正規直交系をなすものとする。すると、この固有関数を用いて $\eta^i(t) = \sum_n a_n \chi^i_n(t)$ と展開可能である。ここで注意すべき点は、固有値方程式 (6) においてあるモード $k = 1, 2, \cdots, f$ について固有値$\lambda_k = 0$ となった場合、そのモードの固有関数 $\chi^i_k(t)$ は、$u^i_k(t)$ $(k = 1, 2, \cdots, f)$ に他ならない点である。

さて、作用 $I[x]=\int_{t=0}^{t=T}dtL$ は

$$
\begin{aligned}
I[x] &= I[\bar{x}+\rho+\eta] \\
&= I[\bar{x}+\rho]+\frac{1}{2}\sum_{n}\lambda_n a_n^2+\sum_{n,i}\lambda_n a_n\int_0^T dt\rho^i(t)\chi_n^i(t) \\
&\quad +\sum_{i,j,n}\rho^i(T)P_{ij}(T)a_n\dot{\chi}_n^j(T)
\end{aligned}
$$

と計算される。一方、測度 $\mathcal{D}\boldsymbol{x}=\mathcal{D}\prod_i\eta^i\propto\prod_n a_n$ であるから、経路積分が実行でき、

$$
K(\boldsymbol{b},T;\boldsymbol{a},0)=\mathcal{N}\left(\frac{2\pi}{i}\right)^{\frac{f}{2}}\left(\prod_{n\neq\text{zero mode}}\lambda_n\right)^{-\frac{1}{2}}\prod_{k=1}^{f}\delta\Big(\sum_{i,j}\rho^i(T)P_{ij}(T)\dot{u}_k^j(T)\Big)e^{\frac{i}{\hbar}I[\bar{x}+\rho]} \tag{7}
$$

のようになる。ここで、$\mathcal{N}$ は測度の変数変換をおこなったときに現れるヤコビアンである。デルタ関数が現れる理由は、caustics が生じているモードについては固有値がゼロであるため、作用 $I[x]$ がそのモードについて a_n が 1 次になるためである。さらに、デルタ関数を計算すると

$$
\prod_{k=1}^{f}\delta\Big(\sum_{i,j}\rho^i(T)P_{ij}(T)\dot{u}_k^j(T)\Big)=\left|\det{}'\left(\sum_j P_{ij}(T)\dot{u}_k^j(T)\right)\right|^{-1}\prod_{i=1}^{f}\delta\left(\rho^i(T)\right) \tag{8}
$$

を得る。ただし、$\det' M$ は $d\times d$ 行列 M の最初の $f\times f$ 行列部分に関する行列式のことである。compensation factor $\rho^i(t)$ は (5) 式のように書けていたので、(8) 式中のデルタ関数は

$$
\prod_{i=1}^{f}\delta\left(\sum_j[(U^{\perp}(T))_{ij}(b^j-h^j(a))]\right) \tag{9}
$$

の形になる。これは、位置ベクトル $U^{\perp}(T)_{ij}h^j$ なる点を含み $u_k^i(t)$ によって張られる超曲面上以外への空間へは遷移できないことを意味する。つまり、遷移可能な空間に関して言えば caustics が古典的に生じている場合、その量子論は古典的 caustics の性質をそのまま受け継ぐということである。

ファインマン核 (7) は、(8) 式、(9) 式と合わせてさらに計算できる。

(7) 式中の $(\prod_{n\neq\text{zero mode}}\lambda_n)^{-1/2}$ について

$$
\left(\prod_{n\neq\text{zero mode}}\lambda_n\right)^{-\frac{1}{2}}=\left|\prod_{n\neq\text{zero mode}}\lambda_n\right|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-i\frac{\pi}{2}m\right)
$$

と書けることに注意すると、ファインマン核 $K(\boldsymbol{b},T;\boldsymbol{a},0)$ は極座標表示

$$K(\boldsymbol{b},T;\boldsymbol{a},0)=R(T)\prod_{i=1}^{f}\delta\left(\sum_{j}[(U^{\perp}(T))_{ij}(b^{j}-h^{j}(a))]\right)e^{i\Theta(\boldsymbol{b},T;\boldsymbol{a},0)} \tag{10}$$

と書けることがわかる。ただし、

$$\Theta(\boldsymbol{b},T;\boldsymbol{a},0):=\frac{1}{\hbar}I[\bar{\boldsymbol{x}}]-\frac{\pi}{2}m+\gamma$$

である。$R(T)$、$\Theta(\boldsymbol{b},T;\boldsymbol{a},0)$ はともに実数関数である。式変形の途中に現れた量 m はモース指数のことであり、負固有値の数に相当する。γ は T に依存しない定数である。(10) 式の $R(T)$ はまだ決まっていないのでこれを決める必要があるが、そのためにはファインマン核のユニタリティー

$$\prod_{i=1}^{d}\delta\left(a^{i}-c^{i}\right)=\int\prod_{i=1}^{f}db^{i}K^{*}(\boldsymbol{b},T;\boldsymbol{c},0)K(\boldsymbol{b},T;\boldsymbol{a},0)$$

を用いればよい。途中の計算は繁雑なので詳しくは [8] を参照していただきたい。$T\to 0$ で自由粒子の核になることを用いると最終的に

$$K(\boldsymbol{b},T;\boldsymbol{a},0)=(2\pi i\hbar)^{-\frac{d-f}{2}}\sqrt{|\det Z|}\prod_{i=1}^{f}\delta\left(\left[U^{\perp}(T)(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}))\right]^{i}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}I[\bar{\boldsymbol{x}}]-\frac{i\pi}{2}m\right)$$

を得る。ここで、行列 Z の成分は

$$Z_{ij}=\begin{cases}\{\delta_{n}^{i}-u_{n}^{i}(T)\}v_{j}^{n}(T) & j=1,2,\cdots,f \text{ の時}\\ X_{ji} & j=f+1,\cdots,d \text{ の時}\end{cases}$$

で与えられる。X_{ij} は古典的作用 $I[\bar{x}]$ の $a^{i}b^{j}$ の係数である。

$$I[\bar{x}]=W_{ij}a^{i}a^{j}+X_{ij}a^{i}b^{j}+Y_{ij}b^{i}b^{j}+E_{i}a^{i}+F_{i}b^{i}+G.$$

X_{ij} を $u_{k}^{i}(t)$, $v_{k}^{i}(t)$ 等によってあらわすとその形は以下のようにかなり複雑である。

$$\begin{aligned}X_{ij} &= \frac{1}{2}\left[-P_{ik}(0)\dot{u}_{j}^{k}(0)+\left\{\dot{v}_{i}^{k}(T)-\sum_{l=f+1}^{d}v_{i}^{l}(T)\dot{u}_{l}^{k}(T)\right\}P_{kn}(T)u_{j}^{n}(T)\right]\\ &\quad +\frac{1}{2}\left\{v_{i}^{k}(T)-\sum_{l=f+1}^{d}v_{i}^{l}(T)u_{l}^{k}(T)\right\}\left[P_{kn}(T)\dot{u}_{j}^{n}(T)+\{Q_{kn}(T)+Q_{nk}(T)\}u_{j}^{n}(T)\right].\end{aligned}$$

4 結論及び課題

1 次元系の caustics から d 次元系への拡張を行った。d 次元系では、partial caustics と full caustics の 2 種類があることがわかった。d 次元系において古典的に caustics が生じる際、ファインマン核がどのようになるかについて経路積分を用いて半古典近似法により計算した。結果として、d 次元系においても 1 次元系の場合と同様、古典論的に caustics が生じている場合、量子論的にもその自由度については古典論的に行くことのできる超曲面以外への遷移は不可能であることがわかった。

この結果を下に、場の理論へ caustics を拡張することは興味ある問題である。すぐにわかることは、相互作用項のない Klein-Gordon 場の場合、caustics が生じることである。これは、自由 Klein-Gordon 場が様々な角振動数を持つ調和振動子の集合であることを考えれば当然の結果である。この場合の caustics は、いわば partial caustics の場の理論版と呼ぶべきものである。また、Klein-Gordon 場の質量 m を定数ではなく場に依存する量 $m(x)$ に変えた場合でも caustics が生じるであろうと期待される。しかしその場合、場の理論における caustics に関する数学的な定義をはっきりさせる必要がある。更に、相互作用項を入れた場合に場の理論の caustics が生じるかどうかを調べることも興味ある課題である。

参考文献

[1] V.P.Maslov and M.V.Fedoriuk, *Semiclassical approximation in quantum mechanics*, D.Reidel Publ., London, 1981.

[2] Y.A.Kravtsov and Y.I.Orlov, *Caustics, Catastrophes and Wave Fields (2nd edition)*, Springer Verlag, Berlin, 1999.

[3] L.Schulman, *Techniques and applications of path integration*, John Wiley and sons Inc., New York, 1981.

[4] R.P.Feynman and A.R.Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals*, McGraw-Hill, New York, 1965.

[5] K.Horie, H.Miyazaki, I.Tsutsui and S.Tanimura, Quantum caustics for systems with quadratic Lagrangians, Ann.Phys. **273**(1999)267-298.

[6] K.Horie, H.Miyazaki, I.Tsutsui and S.Tanimura, Quantum caustics in the Gaussian slit experiment, Phys.Lett. A**253** (1999)259-265.

[7] J.B.Keller, Ann.Phys. **4**(1958)180-188,1.
V.I.Arnold, Functional Analysis and its Applications **1**(1967)1-13.

[8] K.Horie, H.Miyazaki and I.Tsutsui, KEK-Preprint 99-18, hep-th/9905189, *to be appeared in Ann.Phys.*